Una breu introducció a la història de la geometria al segle XIX

El contingut d'aquest text prové d'un curs amb el mateix títol impartit per Jeremy Gray (Universitat Oberta i Universitat de Warwick) i June Barrow-Green (Universitat Oberta) el novembre de 2013 al London Taught Course Center, una associació de les universitats de l'àrea de Londres per formar els estudiants de doctorat en matemàtiques. Ens centrarem en l'article «Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea» [1] que Beltrami va escriure el 1868, però al mateix temps volem donar una visió general de la revolució que va suposar l'aparició de geometries no euclidianes per a les matemàtiques. Vegeu [16] si voleu llegir més sobre aquest tema.

Introducció

El 5è axioma dels elements [4] d'Euclides (c. 300 AC), sovint anomenat el postulat de les paral·leles, diu

> Si un segment interseca dues línies rectes formant dos angles interiors en el mateix costat que sumin menys que dos angles rectes, llavors les dues rectes, si s'extenen indefinidament, es tallen en aquell costat.

Això es pot reformular de diverses maneres, la més famosa de les quals és l'axioma que diu que per qualsevol punt que no formi part d'una recta hi passa només una paral·lela a aquesta recta. La història de les matemàtiques és plena de gent que ha intentat provar-lo a partir dels altres axiomes però tan sols van ser capaços de mostrar que és equivalent a altres proposicions, com ara que la suma dels angles d'un triangle és 180°. Vegeu els treballs d'Omar Khayyám (1048-1131), Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) o Johann Heinrich Lambert (1728-1777). El llibre *Éléments de géométrie* [9] que Adrien-Marie Legendre (1752-1833) va publicar el 1794 conté diversos intents fallits de provar aquest enunciat.

Els orígens de la geometria no euclidiana: Gauss, Lobatxevski, Bolyai i Riemann

Nicolai Ivànovitx Lobatxevski (1792-1856) i independentment János Bolyai (1802–1860) van ser els primers matemàtics a portar a terme investigacions exitoses suposant la negació del postulat de les paral·leles. A la figura podeu veure la imatge original que va emprar Lobatxevski a *Geometrical investigations on the theory of parallels* [10] el 1840 per descriure la situació en què existeixen diverses paral·leles.

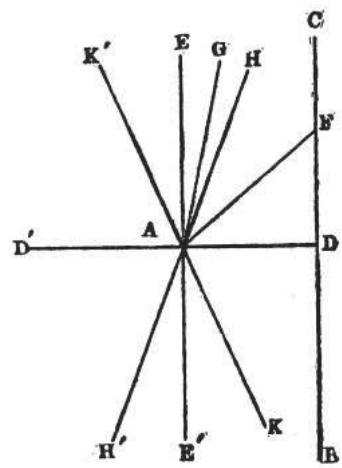


Diagrama de l'article de Lobatxevski.

Després de descobrir que la geometria no euclidiana és tan vàlida i consistent com l'euclidiana, Bolyai va escriure en una carta al seu pare Farkas Bolyai (1775-1856) la famosa frase:

> He creat un món nou i diferent a partir del no-res.

Mirant la seva correspondència hem sabut que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) també havia estat interessat en la geometria no euclidiana al principi de la seva carrera, tot i que mai va publicar res sobre aquest tema. Farkas Bolyai, que era un bon amic de Gauss va comunicar-li els progressos que el seu fill havia fet recentment, però Gauss en comptes de mostrar-se content pels avenços de János es va limitar a dir que ell ja havia reflexionat sobre

aquests resultats anteriorment. Bolyai, que mai va estar convençut de l'afirmació de Gauss, va acabar publicant el seu treball en un annex anomenat «Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens» al final d'un llibre escrit pel seu pare [3]. D'altra banda, l'article de Lobatxevski va aparèixer en una revista russa que no es va traduir fins al cap d'uns anys. Tot plegat va fer que els seus treballs no fossin àmpliament coneguts per la comunitat matemàtica de l'època.

El *theorema egregium* de Gauss [5] del 1827 estableix que la curvatura d'una superfície es pot calcular mesurant angles i distàncies a la superfície mateixa independentment de la manera en què aquesta estigui ficada a l'espai euclidi 3-dimensional, és a dir, és una quantitat intrínseca. El 1851 Bernhard Riemann (1826–1866), que era estudiant seu a Göttingen, va publicar la seva tesi, en la qual ja incloïa les idees bàsiques del que avui en dia anomenem superfícies de Riemann. El 1854 Riemann va entregar tres temes per a la seva *habiltationsvortrag* —una qualificació postdoctoral alemanya—, dels quals Gauss va escollir (molt al seu pesar) el que tenia per títol *On the hypotheses which lie at the foundations of geometry* [13] per la defensa. A l'exposició, Riemann no va mencionar explícitament la geometria no euclidiana i no és clar que fos coneixedor del treball de Bolyai o fins i tot de Lobatxevski, tot i que va citar Legendre i la foscor que segons ell va cobrir els fonaments de la geometria des del temps d'Euclides. Riemann va anar una mica més enllà que Gauss: segons ell, la geometria es basa en mesuraments intrínsecs. En comptes de tenir una geometria privilegiada, va dir que podem fer geometria en qualsevol espai equipat amb una mètrica que ens permeti mesurar longituds i angles. L'*habiltationsvortrag* conté les bases de la geometria riemanniana.

El «Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea» de Beltrami

El protagonista del nostre assaig, Eugenio Beltrami (1835–1899), va néixer a Cremona (Itàlia) i va estudiar matemàtiques a la Universitat de Pavia del 1853 al 1856. Per causa de dificultats econòmiques va treballar com a secretari d'un enginyer ferroviari. El seu primer article es va publicar el 1862. Durant la seva vida va ocupar diverses càtedres per tot Itàlia (geodèsia, mecànica clàssica, física matemàtica, etc.). La seva recerca es pot dividir en dos períodes: el primer —en què va escriure el *Saggio*— sobre geometria diferencial de corbes i superfícies, influenciat principalment per Gauss, Lamé i Riemann i un segon, a partir de 1872, en què es va decantar per la recerca en matemàtica aplicada. Va tenir accés a algunes de les cartes de Gauss i traduccions del treball de Lobatxevski.

L'article comença precisament amb una introducció al treball de Lobatxevski en geometria no euclidiana, un conjunt de conceptes que, en la seva opinió, si prevalguessin canviarien profundament la concepció de la geometria. Beltrami, que sempre mostra gran admiració per Gauss, comenta que tot i que mai va publicar res d'aquesta àrea, Gauss va fer algunes investigacions sobre aquest tema i donava suport total al treball de Lobatxevski. En paraules de Beltrami, l'objectiu d'aquest article era

> [...] trobar un substrat real per aquesta doctrina [de Lobatxevski], en comptes d'admetre la necessitat d'un nou ordre d'entitats i conceptes.

Mostra així el seu interès per relacionar la construcció lògica o axiomàtica de Lobatxevski amb un model en què poder utilitzar la geometria clàssica.

La propera secció tracta sobre el principi de superimposabilitat de figures, que diu que per tal de mesurar necessites ser capaç de moure les figures lliurement per la superfície sense cap tipus de distorsió. Gauss va demostrar que les superfícies amb aquesta propietat són precisament les que tenen *curvatura esfèrica* constant (avui en dia ho anomenem curvatura gaussiana). Beltrami observa que tots els resultats de la geometria plana que només depenen del principi de superimposibilitat es poden transferir a aquest context: «la conclusió d'una prova comprèn necessàriament totes les situacions en què les hipòtesis són satisfetes».

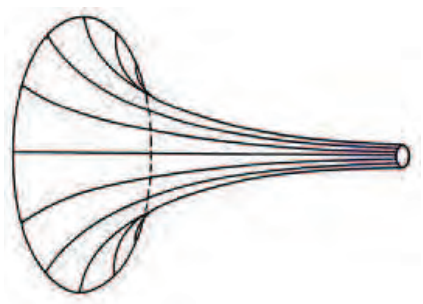
La part tècnica de l'article comença a la tercera secció, on s'estudia la mètrica

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2-v^2)du^2 + 2uvdudv + (a^2-u^2)dv^2}{(a^2-u^2-v^2)^2},$$

que correspon a una superfície amb curvatura gaussiana $-1/R^2 < 0$. La manera com Beltrami arriba a aquesta expressió està descrita en una nota al final de l'article per evitar interrupcions. L'element de línia d'una superfície de curvatura constant positiva $1/R^2$ (i.e. una esfera de radi R) és

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2+v^2)du^2 - 2uvdudv + (a^2+u^2)dv^2}{(a^2+u^2+v^2)^2}.$$

El seu truc va ser substituir R i a pels nombres imaginaris iR i ia respectivament. Va denominar la superfície resultant *pseudoesfera*, vegeu la figura següent per una representació, i es pot obtenir com la superfície de revolució d'una tractriu al voltant de la seva asímptota.



La *pseudoesfera* de Beltrami.

Tornant a la tercera secció, Beltrami continua la seva exposició observant que aquesta expressió de l'element de línia té l'avantatge que les geodèsiques vénen donades exactament per equacions lineals en les variables u i v. Tal com passa amb el pla euclidi, hi ha dues famílies de geodèsiques resultants de fer una de les coordenades (u, v) constant i deixar variar l'altra. Per cada punt de la superfície hi ha una geodèsica de cada conjunt, però a diferència del que passa en el cas euclidi, aquestes geodèsiques només formen un angle recte als punts on $u = 0$ o $v = 0$, les *geodèsiques fonamentals*.

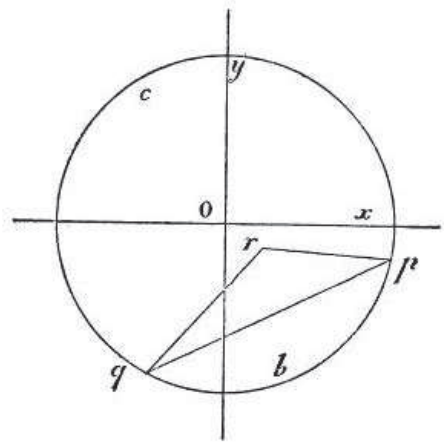
Per tal que l'expressió de l'element de línia ds^2 tingui sentit cal que $u^2 + v^2 \leqslant a^2$. Ell es refereix a la circumferència de radi a com el *cercle límit*. Tot seguit fa un càlcul explícit de la longitud d'una geodèsica que vagi des de l'origen fins al cercle límit i conclou que és infinita. Interpreta que aquest cercle límit conté una representació d'infinits punts de la superfície, i diu que es pot veure com una geodèsica de radi infinit. A continuació llista les normes del seu model (sovint anomenat disc de Beltrami-Klein):

I. Dues cordes diferents que es tallen dins del cercle límit corresponen a geodèsiques que s'intersequen en un punt de distància finita en un angle diferent de 0° i 180°.

II. Dues cordes diferents que es tallen a la circumferència límit corresponen a geodèsiques que convergeixen en un únic punt a l'infinit i tenen la mateixa inclinació.

III. Dues cordes diferents que es tallen fora del cercle límit o són paral·leles en el sentit euclidià corresponen a dues geodèsiques amb cap punt en comú en la seva extensió completa a la superfície.

Beltrami fa servir la imatge de la figura de sota per provar que per tot punt sempre hi ha dues geodèsiques paral·leles a una geodèsica donada que no passi per aquell punt i que es tallen en un angle diferent de 0° o 180°. Dibuixa una corda pq que correspon a una geodèsica i un punt finit r fora de pq. Llavors observa que les geodèsiques que passen per r es poden classificar en dos tipus: les que intersequen pq dins del disc de radi a i les que no (paral·leles). El límit entre aquests dos casos són les geodèsiques corresponents a rp i rq que conclou que s'intersequen en un angle que no és 0° ni 180°.



Construcció al model de Beltrami.

La resta de la secció es dedica a examinar la correspondència entre la geometria pseudoesfèrica i la geometria no euclidiana del pla. En particular prova que en el seu model la suma dels anges d'un triangle no pot superar 180° i per assolir aquest valor cal que $R = \infty$, fet que és congruent amb els resultats de Lobatxevski. Per acabar, cap al final de l'article estudia el que ell anomena *cercles geodèsics* que són els horocicles de la teoria de Lobatxevski.

L'acceptació de la geometria no euclidiana: Klein, Poincaré i Hilbert

El 1872 el jove Christian Felix Klein (1849-1925) va ser nomenat professor de matemàtiques a Erlangen. Allà va començar el famós *Erlanger Programm*, un programa de recerca que proposava una visió unificada de la geometria utilitzant la geometria projectiva i la teoria de grups. Klein va traslladar l'atenció dels espais a les transformacions: va associar un grup de simetries a cada geometria, i va veure tant la geometria euclidiana com la no euclidiana com casos especials de la geometria projectiva. A [7] va deduir les fórmules de la geometria no euclidiana utilitzant tècniques projectives, mentre que a [8] va mostrar com extendre els seus arguments de 2 a n dimensions. Per ferho va desenvolupar una idea d'Arthur Cayley (1821-1895) per construir una mètrica utilitzant la raó doble. En els seus treballs menciona tant Lobatxevski i Bolyai com Beltrami. Observeu que el títol dels articles de Klein és «On the so-called non-Euclidean geometry», reconeixent la popularitat que l'àrea havia assolit en aquell moment.

Més endavant Jules Henri Poincaré (1854-1912) va descobrir un vincle entre les funcions fuchsianes i la geometria no euclidiana [11]. Amb aquesta motivació va estudiar els famosos models del disc $\mathbb{D}$ i del semiplà superior $\mathbb{H}$ que porten el seu nom. De fet, aquests també havien estat introduïts per Beltrami, que va descriure quines són les transformacions que els relacionen entre si i amb el disc de Beltrami-Klein. L'avantatge dels models de Poincaré és que la representació és conforme i les isometries són grups de transformacions de Möbius. Per contra, les geodèsiques no sempre són línies rectes, sinó que també poden ser arcs perpendiculars a la frontera. En el seu assaig *On the Foundations of Geometry* [12] del 1898, Poincaré adopta un punt de vista convencionalista. L'ús de geometria no euclidiana al seus treballs sobre equacions diferencials el van convèncer que la geometria euclidiana no s'hauria de veure com una veritat a priori, sinó que els axiomes de la geometria s'haurien d'escollir en funció de la conveniència dels resultats que produeixen i no segons una aparent coherència amb la intuïció que tenim sobre el món físic.

Finalment m'agradaria mencionar els treballs de David Hilbert (1862-1943). A *Foundations of Geometry* [6] va proposar un conjunt d'axiomes per a la geometria projectiva que reemplaçarien els d'Euclides. Segons ell, tot i que la geometria tracti de coses sobre les quals tenim fortes intuïcions, no és necessari assignar cap significat concret als conceptes indefinits. Tal com Hilbert va expressar

> Un hauria de poder dir sempre, en comptes de «punts, rectes, i plans», «taules, cadires, i gerres de cervesa».

volent dir que els objectes no són importants, sinó que és de les relacions que hi ha entre ells, del que es tracta.

Conclusió

Beltrami va ser el primer a provar la consistència de la geometria no euclidiana tot modelant-la en una superfície de curvatura constant, la pseudoesfera, i a l'interior d'un disc. El seu estil clar a l'hora d'escriure va ser un factor important perquè l'any següent a la publicació del *Saggio* ja hi haguessin traduccions al francès. Això vol dir que, en contrast amb el que va passar amb Lobatxevski i Bolyai, el seu treball va arribar a les mans de molts matemàtics. Beltrami, juntament amb Riemann, va ser el principal responsable de l'acceptació de la geometria hiperbòlica per la comunitat científica. El segle XIX va ser definitivament un punt d'inflexió en la manera d'entendre la geometria i, més en general, la veritat en matemàtiques.

Referències

Recursos primaris

[1] E. Beltrami «Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea», *Giornale di Mathematiche* VI (1868), 285-315.

[2] E. Beltrami «Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante», *Annali. di Mat.*, ser II, 2 (1868), 232-255.

[3] J. Bolyai and W. Bolyai *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheosis purae...* (1832), 2 vols., Maros-Vásérhely.

[4] Euclides «*Elements*» (c. 300 BC), 13 vols.

[5] C. F. Gauss «Disquisitiones generales circa superficies curvas», *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingesis Recentiores* VI (1827), 99-146.

[6] D. Hilbert *Grundlagen der Geometrie* (1899), Teubner-Verlag Leipzig.

[7] C. F. Klein «Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie I», *Mathematische Annalen* 4 (1871), 573-625.

[8] C. F. Klein «Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie II», *Mathematische Annalen* 6 (1873), 112-145.

[9] A.-M. Legendre *Eléments de géométrie* (1794), textbook.

[10] N. I. Lobatxevski *Geometrical investigations on the theory of parallels* (1840).

[11] J. H. Poincaré *Papers on Fuchsian functions* (1985), Springer-Verlag, Heidelberg i Nova York.

[12] J. H. Poincaré «On the foundations of geometry», *The Monist* **9**, (1898), n. 1, 1-43.

[13] B. Riemann «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen», Habiltationsvortrag (1854, published 1867).

Recursos secundaris

[14] L. Boi, D. Flament, and J.-M. Salanskis (eds.) «1830–1930: a century of geometry» (1992), *Lecture Notes in Physics* **402**, Springer-Verlag, Berlín.

[15] C. C. Gillispie *Dictionary of Scientific Biography*, 16 vols. (1979–1980), American Society of Learned Societies/Charles Scribner's Sons, Nova York.

[16] J. J. Gray «Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th century», *Springer Undergraduate Mathematics Series*, Springer, 2010.

[17] J. Stillwell «Sources of hyperbolic geometry», *History of Mathematics* **10** (1996), American Mathematical Society, Providence, RI.

David Martí Pete
Universitat Oberta, Regne Unit

Premis

Premi Abel 2014: Yakov G. Sinai (1935–)

L'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres ha resolt concedir el premi Abel 2014 a Yakov G. Sinai, de 78 anys. Actualment el professor Sinai treballa a la Universitat de Princeton, EUA, i a l'Institut Landau de Física Teòrica, a l'Acadèmia de Ciències de Rússia. Les raons del premi són «les seves constribucions fonamentals als sistemes dinàmics, la teoria ergòdica i la física matemàtica». Yakov Sinai és un dels matemàtics de referència i la seva obra ha tingut i té una gran influència. Entre els seus treballs a cavall dels sistemes dinàmics, la física matemàtica i la teoria de la probabilitat hi podem incloure el concepte de l'entropia de Kolmogorov-Sinai, els *billiars* de Sinai, les mesures de Sinai-Ruelle-Bowen, i la teoria de Pirogov-Sinai. Així, els seus treballs estudien la connexió entre els sistemes dinàmics deterministes i els sistemes probabilístics o estocàstics. Durant tota la seva carrera ha escrit entorn doscents cinquanta treballs i ha tingut cinquanta estudiants de doctorat.

Yakov G. Sinai ha sigut mereixedor, durant tota la seva carrera, de nombrosos premis internacionals de màxim prestigi com el Leroy P. Steele for Lifetime Achievement, que otorga la Societat Matemàtica Americana, l'any 2013.

Des de l'editorial de la *SCM/Notícies* farem tot el possible per tal que en el proper número puguem oferir-vos un article al més complet possible sobre l'obra matemàtica del professor Sinai.